

# Algebra logiki - Boole'a.

## Minimalizacja funkcji logicznych metodą tablic Karnaugh

Metoda ma zastosowanie przy minimalizacji funkcji logicznych o co najwyżej pięciu zmiennych  $x_1, \dots, x_5$ . Metoda ta wykorzystuje tzw. Aksjomaty algebry Boole'a:

$$Ax + A\bar{x} = A \quad (1)$$

$$(B + x)(B + \bar{x}) = B \quad (2)$$

mówiące że, sumę (1) lub iloczyn (2) o składnikach różniących się negacją jednej zmiennej, można zastąpić jednym składnikiem bez wymienionej zmiennej

W praktyce, dla łatwiejszego korzystania z powyższych zasad stosuje się tzw. Tablice Karnaugh, które stanowią pewną postać tablicy funkcji logicznej. Tablica Karnaugh jest tak zbudowana, że każde dwie sąsiednie komórki tablicy różnią się negacją jednej zmiennej wejściowej (argumentu  $x_n$ ) funkcji logicznej.

Sposób wypełniania tablicy Karnaugh na podstawie tablicy funkcji logicznej na przykładzie funkcji trójargumentowej:

Tablica Karnaugh dla zadanej funkcji:

Tablica funkcji logicznej trójargumentowej:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$x_2x_3$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Wartości zmiennych  $x_n$  są wpisane w górnym wierszu oraz w lewej kolumnie tablicy Karnaugh. W pozostałe komórki należy wpisać wartości Y funkcji logicznej. Każdej komórce tablicy odpowiada jedna kombinacja argumentów  $x_n$ .

Po wypełnieniu tablicy należy przystąpić do tzw. „sklejania” zer oraz jedynek. Należy sklejać zera bądź jedynki położone w sąsiednich kłatkach tworząc grupy zer oraz jedynek. Należy tworzyć możliwie największe grupy o parzystej liczbie sklejonnych klatek. Wyjątek stanowi tu pojedyncza klatka nie dająca się skleić z żadną inną. Za sąsiednie uważa się klatki położone na krańcach tego samego wiersz lub tej samej kolumny.

### Sklejanie zer:

$x_2x_3$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	1	1	0

$y = x_1 + \bar{x}_2$

$y = \bar{x}_2 + x_3$

Stworzono dwie grupy dwuklatkowe. Jak widać dane zero lub jedynek można wykorzystać do stworzenia kilku grup.

Dla każdej grupy zer należy napisać równanie składające się z sumy tych zmiennych  $x_n$ , które mają taką samą wartość dla całej grupy, przy czym jeżeli wartość określonej zmiennej jest równa zero to piszemy tą zmienną niezanegowaną, jeżeli zaś jej wartość jest równa jeden to piszemy negację zmiennej. Zmienna, której wartość zmienia się w ramach danej grupy należy pominąć.

1. Grupa pozioma:

$X_1=0$  dla całej grupy – piszemy zmienną niezanegowaną

$X_2=1$  dla całej grupy – piszemy negację zmiennej

$X_3$  zmienia swoją wartość w ramach grupy – pomijamy.

Postać równania dla grupy poziomej:  $y = x_1 + \overline{x_2}$ . Analogicznie uzyskujemy równania dla pozostałych grup zer.

Zminimalizowane równanie funkcji logicznej otrzymujemy mnożąc przez siebie uzyskane ze sklejania sumy:

$$Y = (x_1 + \overline{x_2}) * (\overline{x_2} + x_3)$$

**Sklejanie jedynek:**

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	1	1	0

$\overline{x_2}$

$x_1 * x_3$

Stworzono dwie grupy: jedną dwuklatkową i jedną czteroklatkową. Dla każdej grupy jedynek należy napisać równanie składające się z iloczynu tych zmiennych  $x_n$ , które mają taką samą wartość dla całej grupy, przy czym jeżeli wartość określonej zmiennej jest równa zero to piszemy zmienną zanegowaną, jeżeli zaś jej wartość jest równa jeden to piszemy zmienną niezanegowaną. Zmienna, której wartość zmienia się w ramach danej grupy należy pominąć.

2. Grupa czteroklatkowa:

$X_1$  - zmienia swoją wartość w ramach grupy – pomijamy

$X_2=0$  dla całej grupy – piszemy negację zmiennej

$X_3$  - zmienia swoją wartość w ramach grupy – pomijamy.

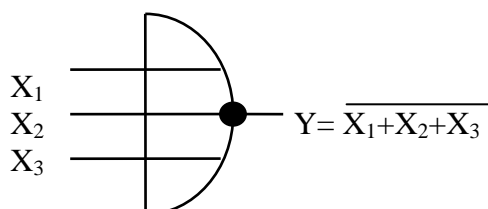
Postać równania dla grupy czteroklatkowej:  $y = \overline{x_2}$ . Analogicznie uzyskujemy równania dla pozostałych grup jedynek. Jak widać im większa uda się stworzyć grupę, tym prostsze będzie opisujące ją równanie.

Zminimalizowane równanie funkcji logicznej otrzymujemy sumując uzyskane ze sklejania iloczyny:

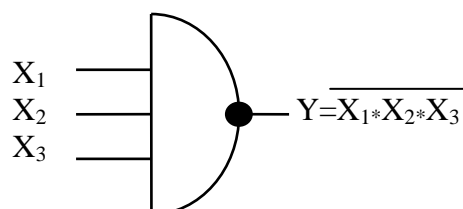
$$Y = \overline{x_2} + (x_1 * x_3)$$

Po uzyskaniu zminimalizowanych postaci funkcji logicznej należy ją tak przekształcić, aby możliwe było jej zamodelowania na określonych elementach logicznych. W ćwiczeniu będą to trójargumentowe elementy logiczne typu NOR lub NAND.

NOR



NAND



Należy tak przekształcić równanie funkcji logicznej aby były w nim działania logiczne realizowane przez odpowiedni element logiczny (NOR / NAND). Korzystamy w tym celu z zasad algebry Boole'a:

Prawa podwójnej negacji

$$\overline{\overline{X}}=X$$

Praw de Morgana

$$\overline{X_1 + X_2} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2}$$

$$\overline{X_1 \cdot X_2} = \overline{X_1} + \overline{X_2}$$

Przy modelowaniu funkcji logicznej na elementach NOR korzystniej jest przekształcać równanie uzyskane ze sklejenia zer:

$$Y = (x_1 + \overline{x_2})(\overline{x_2} + x_3)$$

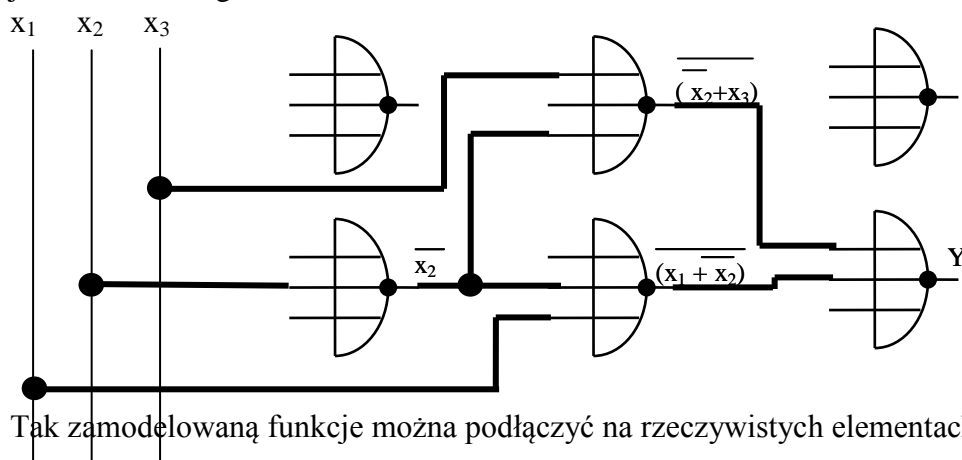
1. Całe równanie podwójnie negujemy:

$$Y = \overline{\overline{(x_1 + \overline{x_2})(\overline{x_2} + x_3)}}$$

2. Rozdzielamy jedną negację zgodnie z prawem de Morgana:

$$Y = \overline{\overline{(x_1 + \overline{x_2})} + \overline{(\overline{x_2} + x_3)}}$$

Tak uzyskane równanie można zamodelować na elementach NOR. Każda z negacji powinna odpowiadać jedna bramka logiczna NOR.



Tak zamodelowaną funkcję można podłączyć na rzeczywistych elementach logicznych.

Przy modelowaniu funkcji logicznej na elementach NAND korzystniej jest przekształcać równanie uzyskane ze sklejenia jedynek:

$$Y = \overline{x_2} + (\overline{x_1} \cdot x_3)$$

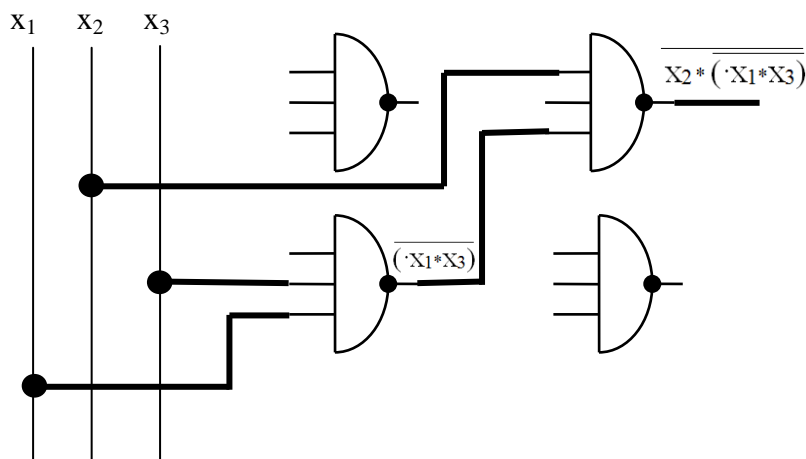
3. Całe równanie podwójnie negujemy:

$$Y = \overline{\overline{\overline{x_2} + (\overline{x_1} \cdot x_3)}}$$

4. Rozdzielamy jedną negację zgodnie z prawem de Morgana:

$$Y = \overline{\overline{x_2} \cdot (\overline{x_1} \cdot x_3)} = \overline{x_2} \cdot (\overline{x_1} \cdot x_3)$$

Tak uzyskane równanie można zamodelować na elementach NAND. Każda z negacji powinna odpowiadać jedna bramka logiczna NOR.



Tak zamodelowaną funkcję można podłączyć na rzeczywistych elementach logicznych.